

Lektion 1

Grundregeln der Arithmetik

Fachrechnen – Grundvorbereitung

Arithmetik ist die Lehre vom Rechnen mit Zahlen — Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren und alles, was daraus folgt. Der Begriff kommt vom griechischen ἀριθμός (arithmós), der Zahl.

Warum ich diese Lektion erstellt habe

In mehr als zwanzig Jahren Unterricht in den unterschiedlichsten Berufsfeldern begegnet mir immer wieder dasselbe Muster. Teilnehmende scheitern im Fachrechnen selten am jeweiligen Sachverhalt, sondern an den mathematischen Grundlagen darunter. Wer bei Klammern, Vorzeichen oder Brüchen ins Stocken gerät, kommt auch bei Dreisatz, Prozent- oder Zinsrechnung nicht weiter – unabhängig vom Ausbildungsberuf.

Das hat nichts mit Begabung zu tun. Rechenregeln, die man jahrelang nicht braucht, verblassen einfach – das geht jedem so. Einige haben diese Themen vor langer Zeit gelernt, andere haben sie unter anderen Umständen kennengelernt, wieder andere haben nie richtig Gelegenheit gehabt, sie in Ruhe zu üben. Für den Einstieg in diese Lektion spielt das keine Rolle.

Lektion 1 ist deshalb als Wiederholung angelegt. Jeder Schritt wird von Grund auf erklärt und an Beispielen gezeigt. Wer sicher ist, arbeitet die Lektion schnell durch und nutzt sie als Auffrischung. Wer an einer Stelle unsicher ist, findet genau dort die Erklärung, die er braucht.

Die Lektion ist berufsneutral gehalten, damit sie sich in allen Berufen einsetzen lässt. Wer diese Grundlagen sicher beherrscht, wird die späteren Lektionen nicht als neue Hürde erleben, sondern als Anwendung von etwas, das er bereits kann.

Hinweis zum Arbeiten mit diesem Skript

Rechnen Sie jedes Beispiel selbst mit – auf Papier, im Kopf oder mit Taschenrechner, bevor Sie sich das Ergebnis ansehen. Nur wer die Rechenschritte einmal selbst nachvollzogen hat, versteht die Regel dahinter und erkennt sie in der nächsten Aufgabe wieder. Reines Mitlesen reicht nicht.

1. Einführung – warum Grundregeln?

Gerechnet wird in nahezu jedem Beruf. Der Kaufmann kalkuliert Preise, prüft Rabatte und Skonti; der Techniker rechnet mit Maßen, Toleranzen und Leistungswerten; im Handwerk werden Materialbedarf, Flächen und Mischungsverhältnisse bestimmt; im gewerblichen Bereich geht es um Mengen, Zeiten und Verbräuche.

Die Anlässe sind völlig verschieden, die Rechenwege dahinter sind es nicht. Denn Mathematik ist universell: Sie fragt nicht danach, ob eine Zahl einen Euro-Betrag, einen Millimeter oder ein Kilogramm bezeichnet. Punkt vor Strich gilt in der Kalkulation genauso wie in der Werkstatt, und ein Bruch verhält sich beim Mischungsverhältnis nicht anders als beim Skonto. Wer die Regeln einmal sicher beherrscht, kann sie in jedem Fachgebiet anwenden – und behält sie ein Arbeitsleben lang.

Jede Rechenaufgabe im beruflichen Alltag besteht aus einer Kette von Rechenschritten: aus Angaben werden Zwischenwerte, aus Zwischenwerten das Endergebnis. In dieser Kette bricht am häufigsten nicht die Formel zusammen, sondern der Rechenweg drumherum – eine falsch gesetzte Klammer, ein vergessener Vorrang von Punkt vor Strich, ein Bruch, der unsauber mit einer Dezimalzahl kombiniert wird, oder ein Zwischenergebnis, das zu früh gerundet wurde.

Diese Lektion frischt die arithmetischen Grundregeln auf, auf denen die weiteren Themen aufbauen – seien es Dreisatz- und Prozentrechnung, Zinsrechnung oder Geometrie. Behandelt werden die Reihenfolge der Rechenarten, die Klammer- und Vorzeichenregeln, das Rechnen mit Brüchen und die verschiedenen Arten des Rundens. Wer das sicher beherrscht, hat für alle weiteren Lektionen das Fundament gelegt. Zahlenverständnis, Kopfrechnen, Überschlagsrechnung und der Umgang mit dem Taschenrechner sind Thema von Lektion 2.

2. Rechenreihenfolge – Klammer, Potenz, Punkt, Strich

Beim Berechnen einer Aufgabe gilt eine feste Rangfolge, die aus vier Stufen besteht:

- **Klammerrechnung** – zuerst wird ausgewertet, was in Klammern steht. Bei verschachtelten Klammern von innen nach außen.
- **Potenzrechnung** – danach werden Potenzen berechnet.
- **Punktrechnung** – danach die Multiplikation ($\cdot$) und Division ($\div$).
- **Strichrechnung** – zum Schluss die Addition (+) und Subtraktion (–).

Bei gleichrangigen Rechenarten wird von links nach rechts gerechnet.

Funktionen – etwa Wurzel, Sinus oder Logarithmus – stehen nicht als eigene Stufe in dieser Rangfolge. Potenz-, Punkt- und Strichrechnung verbinden immer zwei Zahlen: 2^3 als 2 hoch 3; $6 \cdot 5$; $3 + 4$. Die Klammer verbindet nichts, sie legt nur fest, welche Rechnung zuerst an der Reihe ist. Eine Funktion dagegen wirkt auf einen einzelnen Wert. Dieser wird zuerst vollständig ausgerechnet, so als stünde er in einer Klammer; das Ergebnis zählt danach als gewöhnliche Zahl. Ohne Klammer bezieht sich die Funktion nur auf den unmittelbar folgenden Wert. Eine zusätzlich gesetzte Klammer wäre nicht nötig, schafft aber Klarheit.

Merksatz

KlaPPuS – **K**lammer, **P**otenz, **P**unkt, **S**trich. Das kleine „u“ trennt Potenz und Punkt optisch, damit die beiden P nicht durcheinandergeraten.

Beispiel 2.1 Punktrechnung vor Strichrechnung

$$3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$$

$$(3 + 4) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35$$

Beispiel 2.2 Links nach rechts bei gleichem Rang

$$24 \div 4 \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$$

$$24 \div (4 \cdot 3) = 24 \div 12 = 2$$

Die Namen der Rechenglieder

Jede Rechenart hat feste Bezeichnungen für ihre Glieder und für das Ergebnis. In Aufgabenstellungen, Prüfungstexten und Formelsammlungen tauchen sie regelmäßig auf, ohne noch einmal erklärt zu werden.

Rechenart	Glieder	Ergebnis
Addition	Summand + Summand	Summe
Subtraktion	Minuend – Subtrahend	Differenz
Multiplikation	Faktor · Faktor	Produkt
Division	Dividend ÷ Divisor	Quotient
Potenzieren	Basis hoch Exponent	Potenzwert

Multiplikand und Multiplikator: Genau genommen heißt der erste Faktor Multiplikand und der zweite Multiplikator. Weil die Reihenfolge das Ergebnis nicht verändert, spricht man in der Praxis einfach von den beiden Faktoren.

Bei Subtraktion und Division zählt die Reihenfolge: Der Minuend steht vorn und wird verringert, der Subtrahend wird abgezogen. Der Dividend wird geteilt, der Divisor teilt. Genau deshalb tragen diese Glieder eigene Namen – bei Addition und Multiplikation heißen beide Glieder gleich, weil sie vertauschbar sind.

Im Bruch dieselben Rollen: Der Zähler ist der Dividend, der Nenner der Divisor. Die Regel „der Nenner darf nie null sein“ ist deshalb nichts anderes als „der Divisor darf nie null sein“.

Division mit Rest: Geht eine Division nicht auf, bleibt ein Rest: $17 \div 5 = 3$ Rest 2. Dividend ist 17, Divisor 5, Quotient 3, Rest 2. Diese Schreibweise wird beim Umwandeln unechter Brüche in gemischte Zahlen gebraucht.

Potenzen von Zahlen

Eine Potenz ist eine abkürzende Schreibweise für eine wiederholte Multiplikation derselben Zahl mit sich selbst. Die Zahl, die multipliziert wird, heißt Basis; die Anzahl der Multiplikationen heißt Exponent.

Allgemein: $a^2 = a \cdot a$ (Quadrat) und $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (Kubus).

Gesprochen wird „a zum Quadrat“ oder „a hoch 2“ und „a zur dritten“ oder „a hoch 3“. Potenzen stehen im Rang zwischen Klammer und Punkt: erst wird die Potenz berechnet, dann wird multipliziert oder addiert.

Beispiel 2.3 Potenzen von Zahlen berechnen

$$\begin{aligned} 3^2 &= 3 \cdot 3 &= 9 \\ 5^2 &= 5 \cdot 5 &= 25 \\ 2^3 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 &= 8 \\ 10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 &= 1\,000 \\ 1,5^2 &= 1,5 \cdot 1,5 &= 2,25 \end{aligned}$$

Beispiel 2.4 Potenz vor Punkt und Strich

$$\begin{aligned} 5 + 2^2 &= 5 + 4 &= 9 &\quad (\text{nicht } 49) \\ (5 + 2)^2 &= 7^2 &= 49 \\ 3 \cdot 2^3 &= 3 \cdot 8 &= 24 &\quad (\text{nicht } 216) \end{aligned}$$

Potenzen von Einheiten

Die Schreibweise mit Exponent gilt nicht nur für Zahlen, sondern auch für Einheiten. Bei Flächen- und Volumenmaßen wird die Einheit selbst zwei- bzw. dreimal mit sich multipliziert:

- **Quadrateneinheiten (Flächen):** $m^2 = m \cdot m$; $cm^2 = cm \cdot cm$; $km^2 = km \cdot km$.
- **Kubikeinheiten (Volumen):** $m^3 = m \cdot m \cdot m$; $cm^3 = cm \cdot cm \cdot cm$.

Der Exponent gibt an, wie oft die Einheit als Faktor auftritt. Die Rechenregeln sind identisch mit denen der Zahlpotenzen; die Umrechnungen zwischen den Einheiten (z. B. m^2 in cm^2) folgen in einer späteren Lektion.

Beispiel 2.5 Flächen- und Volumenmaße lesen

$$\begin{aligned} \text{Ein Raum von } 5\,m \cdot 4\,m &\quad \text{hat } 20\,m^2 \text{ Fläche} \\ \text{Ein Behälter } 2\,m \cdot 1\,m \cdot 1,5\,m &\quad \text{hat } 3\,m^3 \text{ Volumen} \\ \text{Ein Feld von } 100\,m \cdot 100\,m &\quad \text{hat } 10000\,m^2 = 1 \text{ Hektar} \end{aligned}$$

3. Klammerregeln

Klammern bündeln eine Zwischenrechnung zu einem Wert, mit dem anschließend weitergerechnet wird. Beim Auflösen einer Klammer entscheidet das Vorzeichen oder der Operator vor der Klammer, wie die Klammernglieder in den umgebenden Ausdruck übergehen.

Plus vor der Klammer

Allgemein: $a + (b + c) = a + b + c$ und $a + (b - c) = a + b - c$.

Die Vorzeichen der Klammernglieder bleiben unverändert.

Beispiel 3.1

$$\begin{aligned} 20 + (5 + 3) &= 20 + 5 + 3 = 28 \\ 20 + (5 - 3) &= 20 + 5 - 3 = 22 \end{aligned}$$

Minus vor der Klammer

Allgemein: $a - (b + c) = a - b - c$ und $a - (b - c) = a - b + c$.

Das Minuszeichen kehrt jedes Vorzeichen innerhalb der Klammer um. Dies ist die häufigste Fehlerquelle im gesamten Bereich der Klammerrechnung.

Beispiel 3.2

$$20 - (5 + 3) = 20 - 5 - 3 = 12$$

$$20 - (5 - 3) = 20 - 5 + 3 = 18$$

$$20 - (5 - 8) = 20 - 5 + 8 = 23$$

$$20 - (5 + 8) = 20 - 5 - 8 = 7$$

Merken: Aus $+$ (...) wird jedes Vorzeichen unverändert übernommen, aus $-$ (...) wird jedes Vorzeichen umgekehrt.

Faktor vor der Klammer

Allgemein: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Der Faktor wird auf jedes Glied der Klammer einzeln angewendet. Diese Regel entspricht dem Distributivgesetz und wird in Abschnitt 5 erneut aufgegriffen.

Beispiel 3.3

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$$

$$4 \cdot (10 - 3) = 4 \cdot 10 - 4 \cdot 3 = 40 - 12 = 28$$

Geteiltzeichen nach der Klammer

Wenn eine Summe (oder Differenz) in Klammern durch eine Zahl geteilt wird, darf jedes Klammerglied einzeln geteilt werden.

Allgemein: $(a + b) \div c = a \div c + b \div c$.

Beispiel 3.4

$$(20 + 10) \div 5 = 20 \div 5 + 10 \div 5 = 4 + 2 = 6$$

$$(30 - 12) \div 6 = 30 \div 6 - 12 \div 6 = 5 - 2 = 3$$

Geteiltzeichen vor der Klammer – Vorsicht

Anders liegt der Fall, wenn durch eine Klammer geteilt wird. Dann muss die Klammer zuerst ausgerechnet werden. Die Klammerglieder dürfen nicht einzeln als Divisor verwendet werden.

Allgemein: $a \div (b + c) \neq a \div b + a \div c$. Richtig ist: erst die Klammer ausrechnen, dann teilen.

Beispiel 3.5

Richtig: $20 \div (4 + 1) = 20 \div 5 = 4$

Falsch: $20 \div (4 + 1) = 20 \div 4 + 20 \div 1 = 5 + 20 = 25$

Merken: Steht die Klammer im Zähler (Klammer wird geteilt), darf einzeln geteilt werden. Steht sie im Nenner (durch die Klammer wird geteilt), muss die Klammer zuerst zusammengefasst werden.

4. Vorzeichenregeln

Die Vorzeichenregeln gelten unabhängig davon, ob eine Klammer im Spiel ist. Werden zwei Zahlen mit Vorzeichen miteinander multipliziert oder dividiert, entscheidet die Kombination der beiden Vorzeichen über das Vorzeichen des Ergebnisses.

Gleiche Vorzeichen ergeben Plus: $(+) \cdot (+) = +$ und $(-) \cdot (-) = +$.

Verschiedene Vorzeichen ergeben Minus: $(+) \cdot (-) = -$ und $(-) \cdot (+) = -$.

Dieselbe Regel gilt für die Division: $(-12) \div (-3) = +4$ und $(-12) \div (+3) = -4$.

Beispiel 4.1 Vorzeichen bei Multiplikation und Division

$$\begin{aligned} (-4) \cdot (-3) &= +12 \\ (-4) \cdot (+3) &= -12 \\ (-15) \div (-5) &= +3 \\ (-15) \div (+5) &= -3 \end{aligned}$$

Achtung: Bei Addition und Subtraktion gilt diese Regel nicht. Dort wird nicht das Vorzeichen des Ergebnisses aus zwei Vorzeichen kombiniert, sondern gerechnet: $-4 + 3$ ergibt -1 , nicht -7 .

5. Rechengesetze

Für Addition und Multiplikation gelten drei grundlegende Gesetze, die das flexible Umformen und geschickte Rechnen erst ermöglichen; für Subtraktion und Division gelten sie in dieser Form nicht. Dazu kommen die Regeln für das Rechnen mit Null und Eins.

Kommutativgesetz – Vertauschungsgesetz

Die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren darf beliebig vertauscht werden.

$$\text{Allgemein: } a + b = b + a \text{ und } a \cdot b = b \cdot a$$

Beispiel 5.1

$$\begin{aligned} 7 + 3 &= 3 + 7 = 10 \\ 4 \cdot 25 &= 25 \cdot 4 = 100 \end{aligned}$$

Achtung: Bei Subtraktion und Division gilt das Kommutativgesetz nicht. $8 - 3$ ergibt 5, aber $3 - 8$ ergibt -5 . Ebenso $12 \div 4 = 3$, aber $4 \div 12 = \frac{1}{3}$.

Assoziativgesetz – Verbindungsgesetz

Bei ausschließlicher Addition oder ausschließlicher Multiplikation darf die Klammerung beliebig verschoben werden.

$$\text{Allgemein: } (a + b) + c = a + (b + c) \text{ und } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Beispiel 5.2

$$\begin{aligned} (15 + 25) + 30 &= 15 + (25 + 30) = 70 \\ (5 \cdot 2) \cdot 7 &= 5 \cdot (2 \cdot 7) = 70 \end{aligned}$$

Achtung: Auch dieses Gesetz gilt nicht für Subtraktion und Division. $(10 - 5) - 2 = 3$, aber $10 - (5 - 2) = 7$.

Distributivgesetz – Verteilungsgesetz

Ein Faktor wird auf jedes Glied einer Summe (oder Differenz) verteilt. Das Gesetz funktioniert in beide Richtungen:

$$\begin{aligned} \text{Ausmultiplizieren: } a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ \text{Ausklammern: } a \cdot b + a \cdot c &= a \cdot (b + c) \end{aligned}$$

Beispiel 5.3 Ausmultiplizieren

$$6 \cdot (10 + 3) = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 3 = 60 + 18 = 78$$

Beispiel 5.4 Ausklammern – geschickter rechnen

$$7 \cdot 12 + 7 \cdot 8 = 7 \cdot (12 + 8) = 7 \cdot 20 = 140$$

Neutrale Elemente – Rechnen mit Null und Eins

Null ist das neutrale Element der Addition, Eins das neutrale Element der Multiplikation: Beide lassen den Wert unverändert und dürfen deshalb jederzeit ergänzt oder weggelassen werden. Die Null in einem Produkt wirkt dagegen anders: $a \cdot 0 = 0$. Ein Produkt ist null, sobald einer seiner Faktoren null ist.

$$\text{Allgemein: } a + 0 = a \quad \text{und} \quad a \cdot 1 = a$$

Beispiel 5.5 Null und Eins im Rechenausdruck

$$7 + 0 = 7$$

$$7 \cdot 1 = 7$$

$$7 \cdot 0 = 0$$

$$(4 + 3) \cdot 0 = 7 \cdot 0 = 0$$

6. Bruchrechnen

Ein Bruch besteht aus Zähler (oben) und Nenner (unten) und beschreibt einen Anteil an einem Ganzen. Der Bruchstrich ist gleichbedeutend mit dem Divisionszeichen: $\frac{3}{4}$ heißt auch $3 \div 4$ und ergibt als Dezimalzahl 0,75.

Der Nenner darf nie null sein

Die Division durch Null ist nicht definiert. Weil der Bruchstrich nichts anderes als ein Divisionszeichen ist, darf im Nenner eines Bruchs niemals null stehen. Der Ausdruck $a \div 0$ hat keinen Wert und ist auch auf dem Taschenrechner ein Fehler.

Warum ist das so? Jede Division ist die Umkehrung einer Multiplikation: $12 \div 4 = 3$, weil $3 \cdot 4 = 12$ ist. Für $12 \div 0$ müsste es also eine Zahl geben, die mit 0 multipliziert 12 ergibt. Die gibt es nicht, denn jedes Produkt mit null ist null.

Teilbarkeitsregeln – erkennen, ob eine Division aufgeht

Beim Kürzen und beim Suchen eines Hauptnenners stellt sich immer dieselbe Frage: Geht die Division ohne Rest auf? Für die wichtigsten Teiler lässt sich das ansehen, ohne zu rechnen.

Die Quersumme ist die Summe aller Ziffern einer Zahl: 738 hat die Quersumme $7 + 3 + 8 = 18$. Sie erfüllt gleich zwei der folgenden Regeln.

Teiler	Regel	Beispiel
durch 2	Die letzte Ziffer ist gerade (0, 2, 4, 6, 8).	314 ja – 315 nein
durch 3	Die Quersumme ist durch 3 teilbar.	738 $\rightarrow$ 18 $\rightarrow$ ja
durch 4	Die letzten beiden Ziffern bilden eine durch 4 teilbare Zahl.	1316 $\rightarrow$ 16 $\rightarrow$ ja
durch 5	Die letzte Ziffer ist 0 oder 5.	245 ja – 244 nein
durch 6	Die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar.	738 gerade, QS 18 $\rightarrow$ ja
durch 9	Die Quersumme ist durch 9 teilbar.	738 $\rightarrow$ 18 $\rightarrow$ ja
durch 10	Die letzte Ziffer ist 0.	1250 ja – 1 255 nein

Regeln lassen sich kombinieren. Durch 12 teilbar heißt durch 4 und durch 3 teilbar: Bei 7236 bilden die letzten beiden Ziffern 36 eine durch 4 teilbare Zahl, und die Quersumme 18 ist durch 3 teilbar – also ist 7236 durch 12 teilbar.

Beispiel 6.1 Teilbarkeit erkennen und kürzen

180/240	letzte Ziffern gerade	→ durch 2:	90/120
	wieder beide gerade	→ durch 2:	45/60
	Quersummen 9 und 6	→ durch 3:	15/20
	letzte Ziffern 5 und 0	→ durch 5:	3/4

Warum 7 und 8 hier fehlen. Für die 7 gibt es keine praktikable Regel – jedes bekannte Verfahren dauert länger als die Division selbst. Für die 8 müssten die letzten drei Ziffern geprüft werden, was ebenfalls kaum Zeit spart. In beiden Fällen ist direktes Teilen der schnellere Weg.

Die Regeln für 3 und 9 erklären nebenbei, warum gerade diese Zahlen im Nenner zu nicht abbrechenden Dezimalzahlen führen – dazu mehr in Abschnitt 7.

Kürzen

Kürzen bedeutet, Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl zu teilen. Der Wert des Bruchs ändert sich dabei nicht – $12/18$ und $2/3$ sind dieselbe Zahl, nur anders geschrieben.

Gekürzt wird aus praktischen Gründen: Ein Bruch mit kleinen Zahlen lässt sich leichter überblicken und leichter weiterverarbeiten. Wer $2/3$ und $3/4$ vor sich hat, sieht den Hauptnenner 12 sofort; bei $12/18$ und $15/20$ muss er ihn suchen. In Ergebnissen ist der vollständig gekürzte Bruch außerdem die übliche Form.

Beispiel 6.2 Kürzen

$$12/18 = (12 \div 6) / (18 \div 6) = 2/3$$

Erweitern

Erweitern bedeutet, Zähler und Nenner mit derselben Zahl zu multiplizieren. Auch hier bleibt der Wert gleich.

Erweitert wird nicht, um einen Bruch schöner zu machen, sondern um ihn rechenfähig zu machen: Zwei Brüche lassen sich nur addieren oder subtrahieren, wenn sie denselben Nenner haben. Das Erweitern stellt diesen gemeinsamen Nenner her – siehe den folgenden Absatz Addition und Subtraktion.

Beispiel 6.3 Erweitern

$$2/3 = (2 \cdot 4) / (3 \cdot 4) = 8/12$$

Addition und Subtraktion – gleicher Nenner nötig

Brüche können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie denselben Nenner haben. Ist das nicht der Fall, wird zuerst der Hauptnenner gebildet und beide Brüche werden entsprechend erweitert.

Beispiel 6.4 Gleicher Nenner

$$3/8 + 2/8 = 5/8$$

Was ist der Hauptnenner?

Der Hauptnenner ist die kleinste Zahl, die durch alle vorkommenden Nenner ohne Rest teilbar ist – mathematisch das kleinste gemeinsame Vielfache. Beide Brüche werden auf diesen gemeinsamen Nenner erweitert, damit man die Zähler addieren oder subtrahieren kann.

Praktische Bestimmung: Man geht die Vielfachen des größeren Nenners durch, bis ein Vielfaches auch durch den kleineren Nenner teilbar ist.

Bei 3 und 4: 4 geht nicht, 8 geht nicht, 12 ist durch 3 teilbar – der Hauptnenner ist 12.

Notfallregel: Wenn kein kleineres gemeinsames Vielfaches sichtbar ist, kann man die Nenner einfach miteinander multiplizieren. Das ergibt zwar nicht immer den kleinsten Hauptnenner, aber immer einen gemeinsamen – nach dem Rechnen wird das Ergebnis dann gekürzt.

Beispiel 6.5 Ungleiche Nenner – Hauptnenner bilden

$$\begin{aligned} 1/3 + 1/4 &= 4/12 + 3/12 = 7/12 \quad (\text{Hauptnenner } 12) \\ 5/6 - 1/4 &= 10/12 - 3/12 = 7/12 \quad (\text{Hauptnenner } 12) \end{aligned}$$

Multiplikation

Bei der Multiplikation werden Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner gerechnet. Ein gemeinsamer Nenner ist dafür nicht nötig – anders als bei Addition und Subtraktion.

Beispiel 6.6 Multiplikation

$$2/3 \cdot 4/5 = (2 \cdot 4) / (3 \cdot 5) = 8/15$$

Vor dem Multiplizieren kürzen: Beim Multiplizieren steht am Ende ohnehin ein einziger Bruch: alle Zähler oben, alle Nenner unten. Deshalb darf jeder Zähler gegen jeden Nenner gekürzt werden – auch über Kreuz, also der Zähler des einen Bruchs gegen den Nenner des anderen. Das Ergebnis bleibt dasselbe, man rechnet nur mit kleineren Zahlen. Bei Addition und Subtraktion ist dieses Kürzen nicht erlaubt.

Beispiel 6.7 Kürzen vor dem Multiplizieren

Aufgabe: $3/4 \cdot 8/9$

Schritt 1 Als einen Bruch schreiben:

$$3/4 \cdot 8/9 = (3 \cdot 8) / (4 \cdot 9)$$

Schritt 2 Gemeinsame Teiler suchen – oben gegen unten:

3 (oben) und 9 (unten) → beide durch 3

8 (oben) und 4 (unten) → beide durch 4

Schritt 3 Kürzen und ausrechnen:

$$3 \div 3 = 1 \quad 9 \div 3 = 3$$

$$8 \div 4 = 2 \quad 4 \div 4 = 1$$

$$(1 \cdot 2) / (1 \cdot 3) = 2/3$$

Probe ohne Kürzen:

$$(3 \cdot 8) / (4 \cdot 9) = 24/36 = 2/3$$

Beide Wege führen zum selben Ergebnis. Ohne Kürzen muss am Schluss der Bruch 24/36 gekürzt werden, mit Kürzen bleiben die Zahlen von Anfang an klein.

Division

Bei der Division wird mit dem Kehrbuch multipliziert – der Kehrbuch entsteht durch Vertauschen von Zähler und Nenner. Damit wird jede Division auf eine Multiplikation zurückgeführt, und alles aus dem vorigen Abschnitt gilt weiter, auch das Kürzen vor dem Ausmultiplizieren.

Beispiel 6.8 Division mit Kehrbuch

$$3/4 \div 2/5 = 3/4 \cdot 5/2 = 15/8$$

Doppelbruch: Ein Bruch, dessen Zähler oder Nenner selbst ein Bruch ist, ist nichts anderes als eine Division. $(3/4) / (2/5)$ bedeutet $3/4$ geteilt durch $2/5$ und wird durch Multiplikation mit dem Kehrbuch aufgelöst.

Gemischte Zahlen

Ist der Zähler kleiner als der Nenner, spricht man von einem echten Bruch, sein Wert liegt unter 1 ($3/4$, $7/8$). Ist der Zähler größer, ist es ein unechter Bruch mit einem Wert über 1 ($11/4$, $15/8$). Eine gemischte Zahl besteht aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch, zum Beispiel $2 \frac{3}{4}$. Für das Rechnen wird sie zunächst in einen unechten Bruch umgewandelt.

Dazu wird die ganze Zahl mit dem Nenner multipliziert und der Zähler addiert; der Nenner bleibt unverändert. Bei $2 \frac{3}{4}$ sind das $2 \cdot 4 = 8$ Viertel aus der ganzen Zahl, dazu die 3 Viertel des Bruchs – zusammen 11 Viertel.

Beispiel 6.9

$$2\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{11}{4}$$

Rückweg: Ein unechter Bruch wird durch Division wieder in eine gemischte Zahl verwandelt: Der Zähler wird durch den Nenner geteilt. Das ganzzahlige Ergebnis ist die ganze Zahl, der Rest wird zum Zähler, der Nenner bleibt unverändert. In Endergebnissen ist die gemischte Zahl meist die anschaulichere Schreibweise.

Beispiel 6.10 Unechter Bruch in gemischte Zahl

$$\begin{aligned} 11/4 &= 11 \div 4 = 2 \text{ Rest } 3 = 2 \frac{3}{4} \\ 15/8 &= 15 \div 8 = 1 \text{ Rest } 7 = 1 \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Umwandlung Bruch, Dezimalzahl, Prozent

Ein Bruch, eine Dezimalzahl und ein Prozentwert sind lediglich unterschiedliche Schreibweisen desselben Zahlenwerts. Die folgende Übersicht zeigt häufig vorkommende Werte:

Bruch	Dezimalzahl	Prozent
1/2	0,5	50 %
1/4	0,25	25 %
3/4	0,75	75 %
1/5	0,2	20 %
1/10	0,1	10 %
1/20	0,05	5 %
1/50	0,02	2 %
1/100	0,01	1 %

Bruch in Dezimalzahl: Zähler durch Nenner teilen – der Bruchstrich ist das Divisionszeichen ($3/8 = 3 \div 8 = 0,375$).

Dezimalzahl in Bruch: Die Ziffern nach dem Komma werden zum Zähler. Der Nenner ist eine 1 mit so vielen Nullen, wie die Zahl Nachkommastellen hat: eine Stelle 10, zwei Stellen 100, drei Stellen 1 000. Anschließend wird gekürzt.

Beispiel 6.11 Dezimalzahl in Bruch umwandeln

$$\begin{aligned} 0,75 &= 75/100 = 3/4 \\ 0,4 &= 4/10 = 2/5 \\ 0,125 &= 125/1000 = 1/8 \end{aligned}$$

Die Umwandlung ist eine reine Notationssache und keine Prozentrechnung im engeren Sinn – diese folgt in einer späteren Lektion. Wichtig für den Alltag: Brüche und Dezimalzahlen sollten in einer Rechnung nicht gemischt werden; entweder wird alles in Bruchschreibweise oder alles in Dezimalzahlen umgeformt, bevor gerechnet wird.

7. Runden

Beim Runden wird ein Zahlenwert durch einen gerundeten Näherungswert ersetzt. Welche Rundungsart sinnvoll ist, hängt vom Kontext ab.

Kaufmännisches Runden (mathematisches Runden)

Ist die Ziffer nach der letzten beizubehaltenden Stelle 0, 1, 2, 3 oder 4, wird abgerundet; ist sie 5, 6, 7, 8 oder 9, wird aufgerundet. Dieses Verfahren ist in der DIN 1333 beschrieben. In der Prüfungs- und Geschäftspraxis wird es sowohl kaufmännisches als auch mathematisches Runden genannt. In Statistik und Messtechnik ist mit „mathematischem Runden“ dagegen häufig das unten beschriebene Runden zur geraden Ziffer gemeint – im Zweifel lohnt die Nachfrage, welches Verfahren gemeint ist.

Beispiel 7.1 Runden auf eine Nachkommastelle

4,73 wird zu 4,7 (nach der 7 folgt eine 3, also abrunden)
4,75 wird zu 4,8 (nach der 7 folgt eine 5, also aufrunden)
4,78 wird zu 4,8 (nach der 7 folgt eine 8, also aufrunden)

Weitere Rundungsarten

Neben dem kaufmännischen Runden gibt es zwei weitere Verfahren, die in der Praxis vorkommen – im kaufmännischen Alltag aber nur eine untergeordnete Rolle spielen:

- **Technisches oder statistisches Runden** (auch Runden zur geraden Ziffer, englisch banker's rounding): Ist die nächste Ziffer eine 5 und folgen keine weiteren Ziffern, wird so gerundet, dass die letzte beizubehaltende Stelle gerade wird ($2,45 \rightarrow 2,4$, aber $2,55 \rightarrow 2,6$). So heben sich Rundungsfehler über viele Werte hinweg gegenseitig auf. Genutzt in Statistik, Messtechnik und wissenschaftlicher Datenauswertung.
- **Abschneiden (Trunkieren)**: Alle Stellen nach der letzten beizubehaltenden Stelle werden weggelassen, unabhängig davon, wie groß sie sind. Wird nur in Sonderfällen verwendet, z. B. bei bestimmten steuerlichen Rundungen.

In den weiteren Lektionen wird durchgängig kaufmännisch gerundet.

Rundungsstellen nach Kontext

Wie viele Nachkommastellen beibehalten werden, hängt davon ab, was das Ergebnis darstellt:

- **Geldbeträge**: immer auf zwei Nachkommastellen (Cent).
- **Prozentsätze**: meistens auf eine Nachkommastelle (z. B. 12,3 %).
- **Stückzahlen**: immer auf ganze Zahlen (siehe „Praxisrunden“ weiter unten).
- **Maße und Verbrauchswerte**: je nach Angabe eine bis drei Nachkommastellen – der Kontext gibt die sinnvolle Genauigkeit vor.

Beispiel 7.2 Runden auf Cent bei Geldbeträgen

194,7456 € wird zu 194,75 €
530,7448 € wird zu 530,74 €

Beispiel 7.3 Runden bei Prozentsätzen

12,34 % wird zu 12,3 %
19,55 % wird zu 19,6 %

Praxisrunden – auf ganze Einheit runden

Wenn das Rechenergebnis eine Stückzahl, Personen- oder Behälteranzahl beschreibt, muss auf eine ganze Zahl gerundet werden – man kann keinen halben Behälter kaufen und keine 2,3 Personen einsetzen. Ob dabei auf- oder abgerundet wird, entscheidet nicht die Nachkommastelle, sondern der Zweck der Rechnung.

Bedarfsfragen – aufrunden. Bei der Frage „wie viele Kanister, Personenstunden oder Kartons brauche ich?“ wird immer aufgerundet, weil sonst zu wenig zur Verfügung steht.

Beispiel 7.4 Bedarfsfragen – aufrunden

130 l Gebrauchslösung $\div$ 25 l pro Kanister

= 5,2 Kanister $\rightarrow$ 6 Kanister werden benötigt

87 m² Fläche $\div$ 40 m² pro Personenstunde

= 2,175 Personenstunden $\rightarrow$ 3 volle Personenstunden einplanen

320 Türgriffe $\div$ 24 Griffe pro Karton

= 13,33 Kartons $\rightarrow$ 14 Kartons bestellen

Kapazitäts- und Grenzfragen – abrunden. Bei Fragen wie „wie viele Säcke passen in den Transporter, wie viele Ansätze bekomme ich aus dem Vorrat, wie viele Objekte kann ich absperren?“ wird immer abgerundet, weil sonst eine Höchstmenge überschritten würde.

Beispiel 7.5 Kapazitäts- und Grenzfragen – abrunden

Nutzlast eines Transporters 800 kg $\div$ 30 kg pro Sack

= 26,67 Säcke $\rightarrow$ 26 Säcke passen in den Transporter

100 l Vorrat $\div$ 12 l pro Ansatz

= 8,33 Ansätze $\rightarrow$ 8 vollständige Ansätze möglich

250 m Absperrband $\div$ 18 m pro Objekt

= 13,89 Objekte $\rightarrow$ 13 Objekte vollständig absperrenbar

Merksatz: Praxisrunden ist keine feste Richtung, sondern eine bewusste Entscheidung. Auf diejenige Seite runden, die dem Zweck der Rechnung entspricht – bei Bedarf immer aufrunden, bei Kapazität und Grenzen immer abrunden.

Regel: nie in Zwischenschritten runden

Ein Zwischenergebnis wird grundsätzlich nicht gerundet – nur das Endergebnis. Wer in Zwischenschritten rundet, verschiebt die weiteren Rechenschritte und bekommt am Ende ein anderes Ergebnis.

Ausnahme in kaufmännischen Rechnungen: Wenn Zwischenbeträge tatsächlich bezahlt werden (Teilzahlungen, Abschläge, Rechnungen an Dritte), müssen sie auf Cent gerundet werden, weil nur ganze Cent überwiesen werden können. In allen anderen Fällen – Formeln, Umrechnungen, Kalkulationen ohne echte Zahlung – bleibt es beim Runden am Ende.

Division zuletzt. Wer zuerst dividiert, erzeugt ein Zwischenergebnis mit Nachkommastellen und rechnet ab dort mit einem gerundeten Wert weiter. Wer zuerst multipliziert und addiert, arbeitet bis zum Schluss mit ganzen Zahlen; die Nachkommastellen entstehen erst im letzten Schritt und werden genau einmal gerundet. Deshalb gilt unabhängig vom verwendeten Taschenrechner: Die Division kommt ans Ende der Rechnung, nicht an den Anfang.

Warum das gerade bei der Division wichtig ist. Multiplikation, Addition und Subtraktion ganzer Zahlen ergeben wieder ganze Zahlen. Eine Division dagegen kann eine Dezimalzahl erzeugen, die nie abbricht, sondern sich endlos wiederholt. Ein Quotient hat nur dann endlich viele Nachkommastellen, wenn der vollständig gekürzte Nenner außer 2 und 5 keine weiteren Primfaktoren enthält.

Primfaktoren sind diejenigen Primzahlen, aus denen sich eine Zahl durch Multiplikation zusammensetzt: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Eine Primzahl ist nur durch 1 und durch sich selbst teilbar (2, 3, 5, 7, 11, 13 ...). Bei 8 und 20 stecken nur 2 und 5 darin – die Division bricht ab. Bei 12 kommt die 3 dazu – sie bricht nicht ab.

endlich: $1 \div 2 = 0,5$ $1 \div 4 = 0,25$
 $1 \div 5 = 0,2$ $1 \div 8 = 0,125$
 $1 \div 20 = 0,05$ $1 \div 25 = 0,04$

unendlich: $1 \div 3 = 0,333...$ $1 \div 6 = 0,1666...$
 $1 \div 7 = 0,142857142857...$
 $1 \div 9 = 0,111...$ $1 \div 11 = 0,0909...$

Praktisch heißt das: Bei Division durch 3, 6, 7, 9, durch deren Vielfache und durch Primzahlen außer 2 und 5 ist mit einer nicht abbrechenden Dezimalzahl zu rechnen. Der Taschenrechner zeigt dann eine abgeschnittene Zahl an – mit ihr weiterzurechnen verfälscht das Ergebnis. Steht die Division am Ende, spielt das keine Rolle mehr, weil ohnehin nur noch gerundet wird.

8. Zusammenfassung

Die arithmetischen Grundregeln lassen sich in sechs Kernpunkten festhalten:

- **Rechenreihenfolge KlAPPuS:** Klammer, Potenz, Punkt, Strich – in dieser Reihenfolge auswerten, bei gleichem Rang von links nach rechts. Jede Rechenart hat feste Bezeichnungen für ihre Glieder: Summand, Faktor, Dividend, Divisor.
- **Klammerregeln:** Plus vor der Klammer lässt Vorzeichen unverändert, Minus vor der Klammer kehrt sie um. Faktor und Divisor vor der Klammer wirken auf jedes Glied – Vorsicht: durch eine Klammer wird nicht gliedweise geteilt, sondern die Klammer zuerst zusammengefasst.
- **Vorzeichenregeln:** Bei Multiplikation und Division ergeben gleiche Vorzeichen Plus, verschiedene Vorzeichen Minus. Bei Addition und Subtraktion gilt das nicht – dort wird gerechnet, nicht kombiniert.
- **Rechengesetze:** Kommutativ- und Assoziativgesetz gelten für Addition und Multiplikation, das Distributivgesetz verbindet beide Rechenarten. Null und Eins sind die neutralen Elemente; ein Produkt ist null, sobald ein Faktor null ist.
- **Brüche:** Teilbarkeitsregeln zeigen, ob sich kürzen lässt. Addition und Subtraktion brauchen den gleichen Nenner, die Multiplikation läuft Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner, die Division über den Kehrbruch. Bruch, Dezimalzahl und Prozentwert sind nur unterschiedliche Schreibweisen desselben Werts.
- **Runden:** Kaufmännisch runden, die Stellenzahl nach Kontext wählen (Cent, Prozent, ganze Stücke). Praxisrunden ist zweckabhängig: bei Bedarf aufrunden, bei Kapazität abrunden. Nie in Zwischenschritten runden – und die Division möglichst als letzten Rechenschritt setzen.

Häufige Fehlerquellen auf einen Blick

- Vorrang missachtet – Punkt- vor Strichrechnung und Klammern zuerst.
- Minus vor der Klammer – Vorzeichen jedes Klammerinhalts umkehren.
- Durch eine Klammer geteilt – Klammer zuerst zusammenfassen, nicht gliedweise teilen.
- Bruch und Dezimalzahl gemischt – vor dem Rechnen einheitlich umformen.
- Zwischenschritt zu früh gerundet – nur das Endergebnis wird gerundet (Ausnahme: tatsächlich zu bezahlende Beträge).

9. Übungsaufgaben

Rechnen Sie die folgenden Aufgaben ohne Taschenrechner, soweit es geht. Die Lösungen stehen im Anschluss – sehen Sie erst nach, wenn Sie alle Aufgaben eines Blocks bearbeitet haben.

A Zu 2. – Rechenreihenfolge und Begriffe

1. $12 - 3 \cdot 4$
2. $36 \div 6 \cdot 3$
3. $4 + 3^2$
4. Wie heißen die drei Glieder bei $45 \div 9 = 5$?

B Zu 3. – Klammerregeln

5. $(12 - 3) \cdot 4$
6. $50 - (20 - 8)$
7. $6 \cdot (7 - 2)$
8. $120 \div (4 + 2)$

C Zu 4. – Vorzeichenregeln

9. $(-6) \cdot (-7)$
10. $(-36) \div (+9)$
11. $(-5) \cdot (+8)$
12. $(-4) + 9$

D Zu 5. – Rechengesetze

13. $7 \cdot 12 + 7 \cdot 8$ geschickt rechnen
14. $(25 + 17) + 3$ geschickt rechnen
15. $4 \cdot 17 \cdot 25$ geschickt rechnen
16. $9 \cdot 0 + 9 \cdot 1$

E Zu 6. – Teilbarkeit und Brüche

17. Ist 738 durch 6 teilbar? Begründung angeben.
18. $125/175$ vollständig kürzen
19. $2/5 + 1/4$
20. $3/8 \div 3/4$

F Zu 7. – Runden

21. 148,4562 € auf Cent runden
22. 7,449 % auf eine Nachkommastelle runden
23. 95 l Vorrat, 8 l je Ansatz – wie viele volle Ansätze?
24. 250 Schrauben, 60 je Packung – wie viele Packungen?

Lösungen**Ergebnis**

1. $12 - 12 = 0$
2. $6 \cdot 3 = 18$
3. $4 + 9 = 13$
4. 45 Dividend, 9 Divisor
5. $9 \cdot 4 = 36$
6. $50 - 12 = 38$
7. $6 \cdot 5 = 30$
8. $120 \div 6 = 20$
9. +42
10. -4
11. -40
12. +5
13. $7 \cdot 20 = 140$
14. $25 + 20 = 45$
15. $100 \cdot 17 = 1700$
16. $0 + 9 = 9$
17. ja
18. $5/7$
19. $8/20 + 5/20 = 13/20$
20. $3/8 \cdot 4/3 = 12/24 = \frac{1}{2}$
21. 148,46 €
22. 7,4 %
23. 11,875 → 11 Ansätze
24. 4,1666... → 5 Packungen

Lösungshinweis

- Punkt vor Strich
links nach rechts
Potenz vor Strich
Ergebnis 5: Quotient
Klammer zuerst
oder $50 - 20 + 8$
oder $6 \cdot 7 - 6 \cdot 2$
Klammer zuerst zusammenfassen
gleiche Vorzeichen
verschiedene Vorzeichen
verschiedene Vorzeichen
Addition, nicht kombinieren
ausklammern
Assoziativgesetz
erst $4 \cdot 25$
Null und Eins
gerade, Quersumme 18
zweimal durch 5 oder einmal durch 25 kürzen
Hauptnenner 20
Kehrbruch
dritte Stelle ist 6
zweite Stelle ist 4
Kapazität, abrunden
Bedarf, aufrunden