

Lektion 2

Technik und Training des Rechnens

Fachrechnen – Rechensicherheit und Kontrolle

Hinweis zum Arbeiten mit dieser Lektion

Diese Lektion beschreibt Techniken, keine Regeln. Techniken versteht man beim Lesen, beherrschen lernt man sie erst durch Wiederholung. Rechnen Sie jedes Beispiel selbst mit und arbeiten Sie anschließend das Übungsblatt zu dieser Lektion durch – die Aufgaben dort sind so angelegt, dass sie mehrfach genutzt werden können.

1. Einführung – vom Regelwissen zur Rechensicherheit

Lektion 1 hat die Regeln behandelt: die Reihenfolge der Rechenarten, Klammern und Vorzeichen, die Rechengesetze, das Rechnen mit Brüchen und die verschiedenen Arten des Rundens. Wer sie kennt, weiß, wie eine Aufgabe zu rechnen ist. Sicher rechnet er damit noch nicht.

Zwischen beidem liegt ein Unterschied, den jeder aus dem Alltag kennt. Die Regel für die Multiplikation ist schnell erklärt – ob jemand 2,50 € mal 40 Stück im Kopf ausrechnen kann, ohne zum Taschenrechner zu greifen, ist eine andere Frage. Und ob er merkt, dass 1.000 € als Ergebnis nicht stimmen kann, wieder eine andere.

Genau darum geht es in dieser Lektion. Sie behandelt keine neuen Rechenarten, sondern den sicheren Umgang mit den bekannten: ein Gefühl für Zahlen und Größenordnungen, das Verschieben des Kommas beim Umrechnen von Einheiten, Techniken für das Kopfrechnen, den Überschlag als schnelle Schätzung und Verfahren, mit denen sich ein Ergebnis überprüfen lässt. Am Ende steht der Taschenrechner – bewusst zuletzt, weil er die Kontrolle voraussetzt, die davor aufgebaut wird.

Wer Lektion 1 noch nicht durchgearbeitet hat, sollte das zuerst tun. Die Techniken hier setzen die Regeln von dort voraus, nicht umgekehrt.

Warum sich der Aufwand lohnt

In der Prüfung wie im Betrieb wird selten das Rechnen selbst zum Problem, sondern der unbemerkte Fehler. Ein verrutschtes Komma, eine falsch übernommene Zahl, eine Einheit, die nicht passt – das Ergebnis steht da und sieht aus wie jedes andere. Wer die Größenordnung vorher abschätzt, erkennt einen solchen Fehler in Sekunden. Ohne diese Abschätzung bleibt er oft unbemerkt.

Dazu kommt die Zeit. Wer die gängigen Zwischenschritte im Kopf hat, spart in einer Prüfung mit vielen kleinen Rechnungen mehrere Minuten – Zeit, die am Ende für die schwierigen Aufgaben fehlt.

2. Zahlenverständnis

Zahlenverständnis heißt: wissen, was eine Zahl bedeutet, bevor mit ihr gerechnet wird. Wie groß ist sie? Wie verhält sie sich zu einer anderen? Und passt ein Ergebnis überhaupt in die Größenordnung, die zu erwarten war? Alles Weitere in dieser Lektion baut darauf auf.

Stellenwert – was eine Ziffer wert ist

Unser Zahlensystem ist ein Stellenwertsystem: Welchen Wert eine Ziffer hat, hängt davon ab, an welcher Stelle sie steht. Jede Stelle ist zehnmal so viel wert wie die Stelle rechts daneben – nach links wächst der Wert um den Faktor 10, nach rechts schrumpft er um denselben Faktor. Das Komma trennt dabei nur die ganzen von den gebrochenen Anteilen; die Regel selbst läuft darüber hinweg.

Stelle	Wert	Ziffer in 3407,52
Tausender	1 000	3
Hunderter	100	4
Zehner	10	0
Einer	1	7
Zehntel	0,1	5
Hundertstel	0,01	2

Beispiel 2.1 Eine Zahl in ihre Stellenwerte zerlegen

$$3407,52 = 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,01$$

Die Null an der Zehnerstelle ist dabei nicht überflüssig, sondern hält den Platz frei. Ohne sie stünde dort 347,52 – eine Zahl, die fast zehnmal kleiner ist.

Zehnerpotenzen

Große Zahlen lassen sich als Zehnerpotenz abkürzen. Der Exponent gibt an, wie viele Nullen der Zahl folgen – und zugleich, um wie viele Stellen das Komma verschoben wird.

Beispiel 2.2 Zehnerpotenzen

$$\begin{array}{lll} 10^1 = & 10 & 10^4 = 10\ 000 \\ 10^2 = & 100 & 10^5 = 100\ 000 \\ 10^3 = & 1\ 000 & 10^6 = 1\ 000\ 000 \end{array}$$

In dieser Schreibweise wird 2 500 000 zu $2,5 \cdot 10^6$ und 0,004 zu $4 \cdot 10^{-3}$. Für das Fachrechnen ist vor allem die Leserichtung wichtig: Eine Zahl mit einer Stelle mehr ist zehnmal so groß, mit zwei Stellen mehr hundertmal.

Größenordnungen

Für viele Aufgaben ist die genaue Zahl zunächst zweitrangig – entscheidend ist, in welchem Bereich das Ergebnis liegt. Diese Frage lässt sich beantworten, indem man beide Zahlen auf ihre erste Ziffer rundet und mit den glatten Werten rechnet.

Beispiel 2.3 Die Größenordnung eines Ergebnisses abschätzen

$$\begin{array}{lll} 47 \cdot 39 & \text{liegt bei} & 50 \cdot 40 = 2000 \\ 830 \div 19 & \text{liegt bei} & 800 \div 20 = 40 \\ 6200 \cdot 480 & \text{liegt bei} & 6000 \cdot 500 = 3000000 \end{array}$$

Die genauen Werte sind 1 833, rund 43,7 und 2 976 000. Für die Kontrolle reicht die Schätzung völlig: Sie zeigt, ob das Ergebnis in den Hundertern, Tausendern oder Millionen liegt. Wie sich ein solcher Überschlagn systematisch anlegen lässt, steht in Abschnitt 5.

Plausibilität – passt das Ergebnis?

Ein Ergebnis auf dem Papier oder im Display sieht immer richtig aus. Drei kurze Fragen decken die häufigsten Fehler auf: Stimmt die Größenordnung? Stimmt die Richtung – muss das Ergebnis größer oder kleiner sein als die Ausgangszahl? Und stimmt die Einheit?

Beispiel 2.4 Ergebnisse auf Plausibilität prüfen

$$\begin{array}{lll} 2,50 \text{ €} \cdot 40 \text{ Stück} & = & 100 \text{ €} \quad \text{nicht } 1.000 \text{ €} \\ 0,75 \text{ kg} \cdot 12 & = & 9 \text{ kg} \quad \text{nicht } 90 \text{ kg} \\ 1.200 \text{ €} \div 8 \text{ Monate} & = & 150 \text{ €} \quad \text{nicht } 1.500 \text{ €} \end{array}$$

Alle drei Fehler haben dieselbe Ursache: eine Stelle zu viel. Genau das ist der häufigste Rechenfehler überhaupt – und der auffälligste, sobald man vorher weiß, welche Größenordnung zu erwarten ist.

Die Frage nach der Richtung ist ebenso wirkungsvoll. Wer einen Betrag durch eine Zahl größer als 1 teilt, muss ein kleineres Ergebnis erhalten. Kommt ein größeres heraus, wurde multipliziert statt geteilt.

Merksatz: Erst die Größenordnung abschätzen, dann rechnen. Wer weiß, was ungefähr herauskommen muss, erkennt ein falsches Ergebnis sofort – unabhängig davon, ob im Kopf, auf Papier oder mit dem Taschenrechner gerechnet wurde.

3. Einheiten und Kommaverschiebung

Einheiten umzurechnen ist kein eigenes Rechenverfahren. Es ist Multiplizieren oder Dividieren mit 10, 100 oder 1000 – und das bedeutet auf dem Papier nichts anderes, als das Komma um eine, zwei oder drei Stellen zu verschieben. Wer diesen Zusammenhang einmal gesehen hat, muss sich keine Umrechnungstabelle mehr merken.

Multiplizieren und Dividieren mit 10, 100 und 1000

Beim Multiplizieren wandert das Komma nach rechts, beim Dividieren nach links – um so viele Stellen, wie die Zahl Nullen hat. Fehlende Stellen werden mit Nullen aufgefüllt.

Beispiel 3.1 Komma verschieben

$$\begin{aligned} 4,75 \cdot 10 &= 47,5 \\ 4,75 \cdot 100 &= 475 \\ 4,75 \cdot 1000 &= 4750 \\ 4,75 \div 10 &= 0,475 \\ 4,75 \div 100 &= 0,0475 \end{aligned}$$

Die Richtung lässt sich immer aus dem Ergebnis prüfen: Multiplizieren macht die Zahl größer, Dividieren kleiner. Wer das Komma versehentlich in die falsche Richtung schiebt, sieht es sofort – aus $4,75 \cdot 100$ werden dann 0,0475 statt 475.

Einheiten umrechnen – dasselbe Prinzip

Die gebräuchlichen Einheiten für Länge, Masse und Hohlmaße unterscheiden sich jeweils um den Faktor 10, 100 oder 1000. Umrechnen heißt deshalb: mit dem Umrechnungsfaktor multiplizieren oder durch ihn dividieren.

Umrechnung	Faktor	Komma verschieben um
km → m	· 1000	3 Stellen nach rechts
m → cm	· 100	2 Stellen nach rechts
cm → mm	· 10	1 Stelle nach rechts
t → kg	· 1000	3 Stellen nach rechts
kg → g	· 1000	3 Stellen nach rechts
l → ml	· 1000	3 Stellen nach rechts
hl → l	· 100	2 Stellen nach rechts

Beispiel 3.2 Von der großen zur kleinen Einheit

$$\begin{aligned} 2,5 \text{ km} &= 2500 \text{ m} \\ 0,75 \text{ m} &= 75 \text{ cm} \\ 1,2 \text{ kg} &= 1200 \text{ g} \\ 0,35 \text{ l} &= 350 \text{ ml} \\ 4 \text{ hl} &= 400 \text{ l} \end{aligned}$$

Die Gegenrichtung funktioniert genauso, nur mit umgekehrtem Vorzeichen der Bewegung: Das Komma wandert nach links.

Beispiel 3.3 Von der kleinen zur großen Einheit

$$\begin{aligned} 2500 \text{ m} &= 2,5 \text{ km} \\ 75 \text{ cm} &= 0,75 \text{ m} \\ 1200 \text{ g} &= 1,2 \text{ kg} \\ 350 \text{ ml} &= 0,35 \text{ l} \end{aligned}$$

Merksatz: Von der großen zur kleinen Einheit wird die Zahl größer – es wird multipliziert, das Komma wandert nach rechts. Von der kleinen zur großen Einheit wird die Zahl kleiner – es wird dividiert, das Komma wandert nach links. Wer sich unsicher ist, prüft am Ergebnis: 2,5 km können nicht 0,0025 m sein.

Vor dem Rechnen auf eine Einheit bringen

Gemischte Einheiten lassen sich nicht direkt verrechnen. Vor der eigentlichen Rechnung wird alles auf dieselbe Einheit gebracht – sinnvollerweise auf die kleinere, weil dabei keine Nachkommastellen entstehen.

Beispiel 3.4 Gemischte Einheiten vereinheitlichen

$$\begin{aligned} 1,5 \text{ m} + 40 \text{ cm} &= 150 \text{ cm} + 40 \text{ cm} = 190 \text{ cm} \\ 2 \text{ kg} - 300 \text{ g} &= 2000 \text{ g} - 300 \text{ g} = 1700 \text{ g} \\ 1 \text{ l} + 250 \text{ ml} &= 1000 \text{ ml} + 250 \text{ ml} = 1250 \text{ ml} \end{aligned}$$

Flächen- und Raumaße wie m^2 oder m^3 folgen anderen Faktoren – dort geht es nicht um 10, 100 und 1000, sondern um deren Quadrat beziehungsweise dritte Potenz. Sie werden in der Lektion zur Geometrie behandelt.

4. Kopfrechnen

Kopfrechnen ist keine Rechenkunst und kein Selbstzweck. Es geht um die kleinen Rechnungen, die in jeder größeren Aufgabe vorkommen: ein Zwischenwert, eine Überschlagsrechnung, eine schnelle Kontrolle. Wer sie im Kopf erledigt, arbeitet schneller und behält den Überblick über das, was er gerade rechnet.

Alle folgenden Techniken beruhen auf den Rechengesetzen aus Lektion 1, Abschnitt 5. Sie erfinden nichts Neues, sondern nutzen die Freiheit, die diese Gesetze lassen: umstellen, zerlegen, geschickt gruppieren.

Zerlegen und Ergänzen

Statt mit krummen Zahlen zu rechnen, wird auf die nächste glatte Zahl gegangen und die Differenz anschließend verrechnet. Bei der Addition wird zerlegt, bei der Subtraktion ergänzt.

Beispiel 4.1 Zerlegen und Ergänzen

$$\begin{aligned} 47 + 38 &= 47 + 40 - 2 &= 85 \\ 68 + 25 &= 68 + 30 - 5 &= 93 \\ 83 - 47 &= 83 - 50 + 3 &= 36 \\ 92 - 38 &= 92 - 40 + 2 &= 54 \end{aligned}$$

Bei Geldbeträgen lässt sich dasselbe Prinzip auf Euro und Cent anwenden: Beide Teile werden getrennt addiert und erst am Schluss zusammengeführt.

$$\begin{aligned}
 &12,80 + 7,60 + 4,40 \\
 \text{Euro: } &12 + 7 + 4 = 23,00 \\
 \text{Cent: } &80 + 60 + 40 = 180 = 1,80 \\
 &= 24,80
 \end{aligned}$$

Verdoppeln und Halbieren

Verdoppeln und Halbieren gelingt im Kopf schneller als jede andere Multiplikation. Daraus lassen sich weitere Rechnungen aufbauen: Mal 4 ist zweimal verdoppeln, geteilt durch 4 ist zweimal halbieren. Und in einem Produkt darf ein Faktor halbiert werden, wenn der andere verdoppelt wird – das Ergebnis bleibt gleich.

Beispiel 4.2 Verdoppeln und Halbieren

$$\begin{aligned}
 18 \cdot 4 &= 18 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \cdot 2 = 72 \\
 96 \div 4 &= 96 \div 2 \div 2 = 48 \div 2 = 24 \\
 14 \cdot 35 &= 7 \cdot 70 = 490 \\
 24 \cdot 15 &= 12 \cdot 30 = 360
 \end{aligned}$$

Über glatte Zahlen rechnen

Zahlen knapp unter oder über einem glatten Wert werden auf diesen Wert gerundet. Anschließend wird verrechnet, was dabei zu viel oder zu wenig gerechnet wurde: die Anzahl der Einheiten, um die gerundet wurde, mal dem anderen Faktor. Dahinter steht das Distributivgesetz.

Beispiel 4.3 Über glatte Zahlen rechnen

$$\begin{aligned}
 19 \cdot 6 &= 20 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 120 - 6 = 114 \\
 99 \cdot 7 &= 100 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 700 - 7 = 693 \\
 48 \cdot 5 &= 50 \cdot 5 - 2 \cdot 5 = 250 - 10 = 240 \\
 21 \cdot 12 &= 20 \cdot 12 + 1 \cdot 12 = 240 + 12 = 252
 \end{aligned}$$

Entscheidend ist die zweite Zahl in der Korrektur: Sie gibt an, um wie viele Einheiten gerundet wurde. Bei $19 \cdot 6$ ist es eine Einheit, bei $48 \cdot 5$ sind es zwei – und weil jede dieser Einheiten so viel wert ist wie der andere Faktor, werden zweimal 5, also 10, wieder abgezogen.

Rechnen mit 5, 25 und 50

Diese drei Zahlen stehen in einem festen Verhältnis zu 10 und 100. Statt direkt zu multiplizieren, wird der glatte Weg genommen und anschließend halbiert oder geviertelt. Bei der Division läuft es spiegelverkehrt: verdoppeln und durch 10 teilen, vervierfachen und durch 100 teilen.

Beispiel 4.4 Über 10 und 100 rechnen

$$\begin{aligned}
 68 \cdot 5 &= 680 \div 2 = 340 \\
 34 \cdot 50 &= 3400 \div 2 = 1700 \\
 36 \cdot 25 &= 3600 \div 4 = 900 \\
 84 \cdot 25 &= 8400 \div 4 = 2100 \\
 340 \div 5 &= 680 \div 10 = 68 \\
 1\,700 \div 50 &= 3400 \div 100 = 34 \\
 900 \div 25 &= 3600 \div 100 = 36
 \end{aligned}$$

Nach demselben Muster funktioniert die Multiplikation mit 15: das Zehnfache plus dessen Hälfte. Bei Zuschlägen und Stundensätzen ist das eine der häufigsten Rechnungen überhaupt.

$$\begin{aligned}
 48 \cdot 15 &= 480 + 240 = 720 \\
 36 \cdot 15 &= 360 + 180 = 540
 \end{aligned}$$

Prozentanker

Einige Prozentsätze lassen sich unmittelbar aus der Zahl ablesen. Sie dienen als Anker, aus denen sich andere Werte zusammensetzen lassen – die Prozentrechnung selbst ist Thema einer späteren Lektion.

Beispiel 4.5 Prozentanker, hier von 240 €

$$\begin{aligned} 10 \% &= 240 \div 10 = 24,00 \text{ €} \\ 1 \% &= 240 \div 100 = 2,40 \text{ €} \\ 50 \% &= 240 \div 2 = 120,00 \text{ €} \\ 25 \% &= 240 \div 4 = 60,00 \text{ €} \\ 5 \% &= \text{Hälfte von } 10 \% = 12,00 \text{ €} \end{aligned}$$

Zusammensetzen funktioniert danach ohne weitere Rechnung: 15 % sind 10 % plus 5 %, also 24,00 € + 12,00 € = 36,00 €. Und 19 % sind 20 % minus 1 %, also 48,00 € – 2,40 € = 45,60 €.

Hilfreich ist außerdem, dass in der Prozentrechnung Prozentsatz und Grundwert vertauscht werden können. Das Ergebnis bleibt gleich – und oft ist eine der beiden Richtungen deutlich einfacher zu rechnen.

$$\begin{aligned} 4 \% \text{ von } 75 &= 75 \% \text{ von } 4 = 3 \\ 8 \% \text{ von } 50 &= 50 \% \text{ von } 8 = 4 \\ 35 \% \text{ von } 20 &= 20 \% \text{ von } 35 = 7 \end{aligned}$$

Wo Kopfrechnen aufhört

Nicht jede Rechnung gehört in den Kopf. Bei mehrstelligen Divisionen, krummen Dezimalzahlen und langen Ketten von Zwischenwerten steigt die Fehlerwahrscheinlichkeit schneller, als der Zeitgewinn wert ist. Dann gehört die Rechnung auf Papier oder in den Taschenrechner.

Merksatz: Kopfrechnen ist ein Werkzeug für Zwischenschritte und Kontrolle, nicht der Beweis rechnerischer Begabung. Wer weiß, wann er es einsetzt und wann nicht, arbeitet sicherer als jemand, der alles im Kopf erzwingen will.

5. Überschlagsrechnung

Ein Überschlag ist eine bewusst ungenaue Rechnung. Ihr Ergebnis stimmt nicht, aber es stimmt genau genug, um zu erkennen, in welchem Bereich das richtige Ergebnis liegen muss. Das genügt für den Zweck: Der Überschlag ersetzt keine Rechnung, er schützt davor, eine falsche zu übernehmen.

Prinzip: auf die erste Ziffer runden

Alle beteiligten Zahlen werden so gerundet, dass nur die erste Ziffer stehen bleibt und der Rest Nullen sind. Mit diesen glatten Werten lässt sich im Kopf rechnen.

Beispiel 5.1 Überschlag bilden

$$\begin{aligned} 47 \cdot 39 &\rightarrow 50 \cdot 40 = 2000 && \text{genau } 1833 \\ 312 + 489 &\rightarrow 300 + 500 = 800 && \text{genau } 801 \\ 830 \div 19 &\rightarrow 800 \div 20 = 40 && \text{genau } 43,7 \\ 6240 \cdot 480 &\rightarrow 6000 \cdot 500 = 3000000 && \text{genau } 2995200 \end{aligned}$$

Keiner dieser Überschläge trifft das genaue Ergebnis, und keiner soll das. Entscheidend ist die Größenordnung: Das Ergebnis der ersten Aufgabe liegt in den Tausendern, das der letzten in den Millionen.

In welche Richtung der Überschlag abweicht

Wer weiß, ob sein Überschlag zu groß oder zu klein ausfällt, kann das Ergebnis noch besser einordnen. Bei der Multiplikation hängt das davon ab, in welche Richtung gerundet wurde.

Rundung der Faktoren	Überschlag	Folgerung
beide aufgerundet	zu groß	das genaue Ergebnis liegt darunter
beide abgerundet	zu klein	das genaue Ergebnis liegt darüber
einer auf, einer ab	nahe am Wert	die Abweichungen gleichen sich aus

Beispiel 5.2 Richtung der Abweichung

$$\begin{array}{llllll}
 47 \cdot 39 & \rightarrow & 50 \cdot 40 & = & 2000 & \text{zu groß} & \text{genau } 1833 \\
 43 \cdot 31 & \rightarrow & 40 \cdot 30 & = & 1200 & \text{zu klein} & \text{genau } 1333 \\
 47 \cdot 31 & \rightarrow & 50 \cdot 30 & = & 1500 & \text{nahe dran} & \text{genau } 1457
 \end{array}$$

Für einen möglichst treffenden Überschlag lohnt es sich deshalb, gegenläufig zu runden: eine Zahl auf, die andere ab.

Überschlag bei der Division

Bei der Division wirken die beiden Zahlen gegenläufig: Ein größerer Zähler macht das Ergebnis größer, ein größerer Nenner macht es kleiner. Praktisch wählt man den Nenner so, dass er den gerundeten Zähler glatt teilt.

Beispiel 5.3 Überschlag bei der Division

$$\begin{array}{llllll}
 830 \div 19 & \rightarrow & 800 \div 20 & = & 40 & \text{zu klein} & \text{genau } 43,7 \\
 830 \div 19 & \rightarrow & 900 \div 20 & = & 45 & \text{zu groß} & \text{genau } 43,7 \\
 742 \div 34 & \rightarrow & 700 \div 35 & = & 20 & \text{zu klein} & \text{genau } 21,8
 \end{array}$$

Der dritte Fall zeigt den praktischen Trick: $700 \div 35$ lässt sich im Kopf rechnen, $700 \div 30$ dagegen nicht glatt. Ein Nenner, der nicht auf die erste Ziffer gerundet ist, ist erlaubt – der Überschlag muss rechenbar sein, nicht schön.

Anwendung: vorher und nachher

Der Überschlag wird zweimal eingesetzt. Vor der Rechnung bildet er eine Erwartung: Man weiß, was ungefähr herauskommen muss. Nach der Rechnung dient er als Vergleich. Weichen Ergebnis und Überschlag um ein Vielfaches voneinander ab, liegt fast immer ein Komma- oder Stellenfehler vor.

Beispiel 5.4 Überschlag als Kontrolle

$$\begin{array}{llll}
 \text{Aufgabe:} & 386 \text{ Kartons} \cdot 12,40 \text{ €} & & \\
 \text{Überschlag:} & 400 \cdot 12 & = & 4.800 \text{ €} \\
 \text{Ergebnis:} & & = & 4.786,40 \text{ €} \quad \text{passt} \\
 \text{Ergebnis:} & & = & 478,64 \text{ €} \quad \text{Kommafehler} \\
 \text{Ergebnis:} & & = & 47.864,00 \text{ €} \quad \text{Kommafehler}
 \end{array}$$

Merksatz: Der Überschlag ersetzt die Rechnung nicht, er sichert sie ab. Er kostet wenige Sekunden und erkennt genau den Fehler, der sonst unbemerkt bleibt: das verrutschte Komma.

6. Kontrollverfahren

Der Überschlag ist eine von mehreren Möglichkeiten, ein Ergebnis zu prüfen. Jedes Verfahren deckt andere Fehler auf, und keines deckt alle auf. Wer zwei einfache Proben kombiniert, findet mehr als mit einer gründlichen.

Endziffernprobe

Die letzte Ziffer eines Ergebnisses hängt nur von den letzten Ziffern der Ausgangszahlen ab. Rechnet man diese für sich, muss die Endziffer übereinstimmen.

Beispiel 6.1 Endziffernprobe

$$\begin{array}{llll}
 47 \cdot 38 = 1786 ? & 7 \cdot 8 = 56 & \text{muss auf 6 enden} & \text{stimmt} \\
 47 \cdot 38 = 1784 ? & & \text{müsste auf 6 enden} & \text{falsch} \\
 128 + 47 = 175 ? & 8 + 7 = 15 & \text{muss auf 5 enden} & \text{stimmt}
 \end{array}$$

Die Probe ist in zwei Sekunden erledigt, erkennt aber nur Fehler an der letzten Stelle. Bei $63 \cdot 24 = 1\,512$ etwa hat ein falsches Ergebnis von $1\,502$ dieselbe Endziffer und bleibt unentdeckt.

Neunerprobe

Die Neunerprobe arbeitet mit der Quersumme, die aus Lektion 1 bekannt ist. Von jeder Zahl wird die Quersumme gebildet und so lange wiederholt, bis eine einstellige Zahl übrig bleibt. Dieselbe Rechnung wird mit diesen kleinen Zahlen durchgeführt – das Ergebnis muss zur Quersumme des Gesamtergebnisses passen.

Beispiel 6.2 Neunerprobe bei $47 \cdot 38 = 1\,786$

$$\begin{array}{llll}
 \text{Quersumme } 47 & = & 4 + 7 & = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2 \\
 \text{Quersumme } 38 & = & 3 + 8 & = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2 \\
 \text{Probe} & = & 2 \cdot 2 & = 4 \\
 \text{Quersumme } 1786 & = & 1+7+8+6 & = 22 \rightarrow 2 + 2 = 4 \quad \text{stimmt}
 \end{array}$$

Sie findet die Fehler, die der Endziffernprobe entgehen: Beim Beispiel $63 \cdot 24$ von eben ergibt $1\,502$ die Quersumme 8, das richtige Ergebnis $1\,512$ dagegen 9 – der Fehler fällt sofort auf. Umgekehrt hat auch sie eine Lücke: Vertauschte Ziffern verändern die Quersumme nicht. $1\,786$ und $1\,876$ kommen beide auf 4.

Umkehrprobe

Division und Subtraktion lassen sich durch ihre Umkehrung prüfen: Das Ergebnis wird zurückgerechnet und muss die Ausgangszahl ergeben. Das ist die sicherste, aber auch die aufwendigste Probe.

Beispiel 6.3 Umkehrprobe

$$\begin{array}{llll}
 546 \div 14 = 39 ? & \rightarrow & 39 \cdot 14 & = 546 \quad \text{stimmt} \\
 803 - 247 = 556 ? & \rightarrow & 556 + 247 & = 803 \quad \text{stimmt} \\
 17 \div 5 = 3 \text{ Rest } 2 & \rightarrow & 3 \cdot 5 + 2 & = 17 \quad \text{stimmt}
 \end{array}$$

Welche Probe wann

Die Verfahren sind unterschiedlich schnell und finden unterschiedliche Fehler. Die folgende Übersicht ordnet sie den typischen Fehlerarten zu.

Fehlerart	Passende Probe
Komma verrutscht, Größenordnung falsch	Überschlag
Ziffer an der letzten Stelle falsch	Endziffernprobe
Rechenfehler in einem Zwischenschritt	Neunerprobe
Ziffern vertauscht	Überschlag oder Umkehrprobe
falsche Rechenart verwendet	Umkehrprobe

Merksatz: Keine Probe erkennt jeden Fehler. Überschlag und Endziffernprobe kosten zusammen kaum Zeit und decken die häufigsten Fälle ab – bei wichtigen Ergebnissen kommt die Umkehrprobe dazu.

7. Rechnen mit dem Taschenrechner

Der Taschenrechner ist ein zuverlässiges Werkzeug – er rechnet aber genau das, was eingegeben wird, und nicht das, was gemeint war. Vier Punkte tauchen im Unterricht immer wieder als Fehlerquellen auf.

Punkt oder Komma?

Auf dem Taschenrechner ist der Punkt das Dezimalzeichen und ersetzt das Komma. Er ist kein Tausender-trennpunkt. Wer bei Tausenderzahlen den Punkt drückt, gibt versehentlich eine Kommazahl ein.

Beispiel 7.1 Punkt als Dezimalzeichen

Eingabe „1.500“ = 1,5 nicht 1500

Eingabe „2.750“ = 2,75 nicht 2750

Für 1500: einfach 1500 tippen – ohne Trennzeichen.

Klammer im Nenner

Wenn im Nenner eine Multiplikation steht, muss diese zuerst ausgerechnet werden – oder es wird zweimal nacheinander geteilt. Wer die Klammer im Nenner ignoriert und nur einmal teilt, rechnet Multiplikation und Division bei gleichem Rang von links nach rechts und kommt auf ein falsches Ergebnis.

Beispiel 7.2 Aufgabe: $120 \div (24 \cdot 5)$

Richtig A – Nenner zuerst: $120 \div (24 \cdot 5) = 120 \div 120 = 1$

Richtig B – zweimal teilen: $120 \div 24 \div 5 = 5 \div 5 = 1$

Falsch: $120 \div 24 \cdot 5 = 5 \cdot 5 = 25$

Merken: Bei einer Klammer im Nenner immer den Nenner zuerst ausrechnen oder für jeden Faktor im Nenner ein eigenes „geteilt“ eingeben.

Division ans Ende schieben

Wer zuerst dividiert, erzeugt ein Zwischenergebnis mit Nachkommastellen und rechnet ab dort mit einem gerundeten Wert weiter. Wer zuerst multipliziert und addiert, arbeitet bis zum Schluss mit ganzen Zahlen. Warum das gerade bei der Division auftritt, steht in Lektion 1, Abschnitt 7.

Beispiel 7.3 Abgelesenes Zwischenergebnis weiterrechnen

Aufgabe: $100 \cdot 9 \div 6$, in Bruchschreibweise $(100 \cdot 9) \div 6$

erst dividieren: $100 \div 6 = 16,6666\dots$

abgelesen und neu getippt:

$16,6667 \cdot 9 = 150,0003$

erst multiplizieren: $(100 \cdot 9) \div 6 = 900 \div 6 = 150$

Zwischenergebnisse im Gerät behalten

Der Fehler in Beispiel 7.3 entsteht nicht durch das Gerät, sondern durch den Weg über das Papier: Ein Zwischenergebnis wird abgelesen, gekürzt notiert und wieder eingetippt. Jedes Ablesen kostet Genauigkeit und ist zugleich eine Gelegenheit, sich zu vertippen.

Jeder Taschenrechner bietet mindestens einen Weg, das zu vermeiden – die Rechnung ohne Unterbrechung durchtippen, das letzte Ergebnis weiterverwenden oder einen Speicher nutzen. Welche Taste dafür zuständig ist, steht in der Anleitung des jeweiligen Geräts; das Prinzip ist bei allen dasselbe.

Notiert wird ein Zwischenergebnis nur dann, wenn es in der Aufgabe ausdrücklich verlangt ist – etwa als auszuweisender Teilbetrag. Dann wird es an dieser Stelle bewusst gerundet und der gerundete Wert weiterverwendet, weil genau dieser Betrag später bezahlt oder ausgewiesen wird.

Merksatz: Der Taschenrechner macht keine Rechenfehler, sondern führt Eingabefehler zuverlässig aus. Deshalb gehört zu jeder Rechnung am Gerät ein Überschlag – die Kontrolle kommt nicht aus dem Display, sondern aus dem Kopf.

8. Zusammenfassung

Die Techniken dieser Lektion lassen sich in sechs Kernpunkten festhalten:

- **Zahlenverständnis:** Jede Stelle ist zehnmal so viel wert wie die Stelle rechts daneben. Vor jeder Rechnung die Größenordnung abschätzen und das Ergebnis anschließend daran messen – Größenordnung, Richtung und Einheit müssen passen.
- **Einheiten und Kommaverschiebung:** Umrechnen heißt multiplizieren oder dividieren mit 10, 100 oder 1000, also das Komma verschieben. Von der großen zur kleinen Einheit wird die Zahl größer, umgekehrt kleiner. Vor dem Rechnen alles auf eine Einheit bringen.
- **Kopfrechnen:** Zerlegen und Ergänzen, Verdoppeln und Halbieren, über glatte Zahlen rechnen, mit 5, 25 und 50 über 10 und 100 gehen, Prozentanker zusammensetzen. Alles beruht auf den Rechengesetzen aus Lektion 1.
- **Überschlagsrechnung:** Auf die erste Ziffer runden und mit glatten Werten rechnen. Gegenläufiges Runden trifft am besten. Der Überschlag bildet vorher die Erwartung und dient nachher als Vergleich.
- **Kontrollverfahren:** Überschlag für Komma- und Größenordnungsfehler, Endziffernprobe für die letzte Stelle, Neunerprobe für Zwischenschritte, Umkehrprobe für Division und Subtraktion. Keine Probe erkennt alles.
- **Taschenrechner:** Der Punkt ist das Komma, kein Tausendertrennpunkt. Bei Klammern im Nenner zuerst den Nenner ausrechnen, die Division möglichst als letzten Schritt setzen und Zwischenergebnisse nicht ablesen und neu eintippen.

Häufige Fehlerquellen auf einen Blick

- Komma verrutscht – eine Stelle zu viel oder zu wenig verzehnfacht oder zehntelt das Ergebnis.
- Einheiten gemischt – vor dem Rechnen alles auf dieselbe Einheit bringen.
- Umrechnung in die falsche Richtung – von groß nach klein wird die Zahl größer, nicht kleiner.
- Zwischenergebnis abgelesen und neu einge tippt – Genauigkeit geht verloren.
- Am Taschenrechner Punkt statt Komma – 1.500 ist 1,5, nicht 1 500.
- Ergebnis ungeprüft übernommen – ohne Überschlag bleibt ein Fehler unbemerkt.

Diese Techniken werden nicht durch Lesen sicher, sondern durch Wiederholung. Das Übungsblatt zu dieser Lektion enthält Aufgaben zu jedem Abschnitt sowie Trainingsserien zum Kopfrechnen, die sich mehrfach nutzen lassen.