

(I) Grundbegriffe und Abkürzungen

Barwert (Gegenwartswert) K_0 : Wert eines Kapitals zum Zeitpunkt t_0 .

Endwert (Zukunftswert) K_n : Wert des Kapitals nach n Jahren zum Zeitpunkt t_n . Durch Zinsen und Zinseszinsen wächst das Kapital im Laufe der Jahre an, so dass gilt: $K_0 < K_n$.

Zinsen: Entgelt für die Überlassung von Kapital.

Zinseszinsen: Verzinsung der Zinsen. Voraussetzung ist, dass die gewonnenen Zinsen nicht entnommen werden.

Zinssatz (p): Prozentsatz, zu dem ein Kapital verzinst wird.

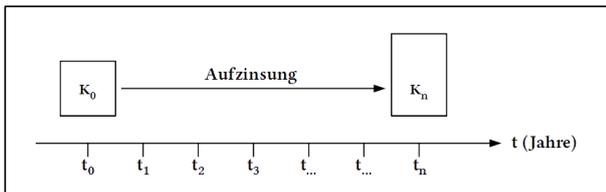
Zinssatz (i): Zinssatz als Dezimalbruch ($i = p \div 100$).

Jahre (n): Dauer des Berechnungszeitraumes.

(II) Aufzinsung (Askontierung)

Aufzinsung bedeutet, dass sich ein heute (im Zeitpunkt t_0) angelegter Geldbetrag (K_0) innerhalb von n Jahren durch Zinsen und Zinseszinsen vermehrt. Der Endwert (K_n) dieses Geldbetrages kann mittels einer Berechnungstabelle oder mittels des Aufzinsungsfaktors berechnet werden.

Schematische Darstellung



Beispiel

Ein Kapital in Höhe von 100.000,00 € wird für 6 Jahre zu einem Zinssatz von 6 % p.a. angelegt. Die Zinsen werden nicht entnommen, sondern dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst.

Frage: Wie hoch ist der Endwert in 6 Jahren?

Barwert K_0 : 100.000,00 €

Zinssatz p : 6 %

Zinssatz i : 0,06

Jahre n : 6 Jahre

(1) Berechnung mittels Berechnungstabelle

Jahr	Kapital	Zinsen	Endwert
1	100.000,00 €	6.000,00 €	106.000,00 €
2	106.000,00 €	6.360,00 €	112.360,00 €
3	112.360,00 €	6.741,60 €	119.101,60 €
4	119.101,60 €	7.146,10 €	126.247,70 €
5	126.247,70 €	7.574,86 €	133.822,56 €
6	133.822,56 €	8.029,35 €	141.851,91 €

Antwort: Der Endwert beträgt in 6 Jahren 141.851,91 €.

(2) Berechnung mittels Aufzinsungsfaktor

Endwert = Kapital \times Aufzinsungsfaktor

$$\begin{aligned} \text{Aufzinsungsfaktor} &= (1+i)^n \\ &= (1+0,06)^6 \\ &= 1,06^6 \\ &= 1,418519112256 \end{aligned}$$

Der Aufzinsungsfaktor ist hier mit 12 Nachkommastellen exakt dargestellt. Eine Berechnung mit 6 Nachkommastellen reicht für gewöhnlich aus. In den finanzmathematischen Tabellen der Fachliteratur sowie in den IHK-Prüfungsaufgaben sind regelmäßig 6 Nachkommastellen angegeben.

Für obiges Beispiel mit $i=0,06$ und $n=6$ ist in finanzmathematischen Tabellen der Wert 1,418519 angegeben.

Aus der Multiplikation von 100.000,00 € mit dem abgerundeten Aufzinsungsfaktor 1,418519 resultiert mit 141.851,90 € gegenüber der exakten Tabellenberechnung eine rundungsbedingte Abweichung von 0,01 €.

Endwert: 100.000,00 € \cdot 1,418519 = 141.851,90 €.

Exkurs: Herleitung des Aufzinsungsfaktors

Der Endwert am Ende des 1. Jahres ergibt sich aus der Multiplikation des Barwertes mit dem Aufzinsungsfaktor für das erste Jahr:

$$100.000,00 \text{ €} \cdot 1,06 = 106.000,00 \text{ €}$$

Im 2. Jahr wird der Endwert des 1. Jahres erneut mit 1,06 multipliziert:

$$106.000,00 \text{ €} \cdot 1,06 = 112.360,00 \text{ €}$$

In den Folgejahren wird der jeweilige Endwert mit 1,06 multipliziert.

Daraus ergibt sich für obiges Beispiel folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} &100.000,00 \text{ €} \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \cdot 1,06 \\ &\text{oder} \\ &100.000,00 \text{ €} \cdot 1,06^6 \end{aligned}$$

(III) Abzinsung (Diskontierung)

Abzinsung bedeutet, dass eine zukünftige Zahlung in n Jahren auf den heutigen Barwert abgezinst wird. Dadurch wird ermittelt, wie viel ein künftiger Geldbetrag zum jetzigen Zeitpunkt wert ist.

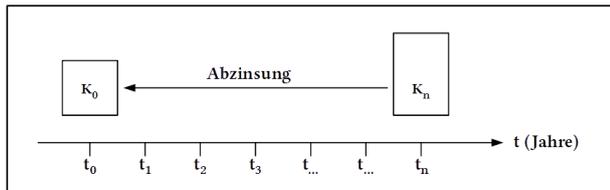
Mathematisch entspricht die Abzinsung der Umkehrung der Aufzinsung. Der Barwert kann also ermittelt werden, indem

(a) der Endwert durch den Aufzinsungsfaktor dividiert wird oder

(b) der Endwert mit dem Abzinsungsfaktor multipliziert wird. Der Abzinsungsfaktor entspricht dem Kehrwert des Aufzinsungsfaktors:

$$\text{Abzinsungsfaktor} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Schematische Darstellung



Beispiel

Ein GmbH-Gesellschafter möchte in 4 Jahren aus Altersgründen aus der Gesellschaft ausscheiden und zu diesem Zeitpunkt eine Abfindung von 250.000,00 € erhalten.

Frage: Wie hoch ist der gegenwärtige Abfindungsbetrag (=Barwert) bei einem Zinssatz von 8 %?

Endwert K_4 : 250.000,00 €

Zinssatz p : 8 %

Zinssatz i : 0,08

Jahre n : 4 Jahre

(1) Berechnung mittels Abzinsungsfaktor

Aus Vereinfachungsgründen wird hier auf eine tabellarische Darstellung verzichtet und direkt mit dem Abzinsungsfaktor gerechnet.

$$\begin{aligned} \text{Abzinsungsfaktor} &= \frac{1}{(1+0,08)^4} \\ &= \frac{1}{1,36048896} \\ &= 0,735029852796453 \\ &\approx 0,735030 \end{aligned}$$

Barwert: 250.000,00 € · 0,735030 = 183.757,50 €.

Antwort: Der gegenwärtige Abfindungsbetrag hat einen Barwert von 183.757,50 €.

(2) Berechnung mittels Aufzinsungsfaktor

Alternativ kann der Endwert durch den Aufzinsungsfaktor für $i=0,08$ und $n=4$ dividiert werden:

Barwert: 250.000,00 € ÷ 1,360489 = 183.757,46 €.

In diesem Fall ergibt sich eine rundungsbedingte Abweichung von 0,04 €.

(IV) Zusammenfassung

(1) Aufzinsungsfaktor (AuF) = $(1+i)^n$
Der Aufzinsungsfaktor ist immer größer als 1.

(2) Abzinsungsfaktor (AbF) = $\frac{1}{(1+i)^n}$
Der Abzinsungsfaktor ist immer kleiner als 1.

(3) Endwert = Barwert × Aufzinsungsfaktor

(4) Barwert = Endwert × Abzinsungsfaktor

(5) Aus Gründen der Genauigkeit sind die Aufzinsungsfaktoren und Abzinsungsfaktoren mit mindestens 6 Nachkommastellen zu berechnen.

(V) Übungsaufgaben

(1) Berechnen Sie die Aufzinsungsfaktoren.

	p	n	Aufzinsungsfaktor AuF
a	5,0 %	5	
b	5,5 %	4	
c	6,0 %	4	
d	7,0 %	6	

(2) Berechnen Sie die Abzinsungsfaktoren.

	p	n	Abzinsungsfaktor AbF
a	6,0 %	3	
b	6,5 %	4	
c	7,0 %	5	
d	8,0 %	6	

(3) Berechnen Sie den Endwert.

	p	n	Barwert	Endwert
a	4,0 %	5	110.000,00 €	
b	5,0 %	6	140.000,00 €	
c	6,0 %	5	130.000,00 €	
d	6,5 %	6	175.000,00 €	

(4) Berechnen Sie den Barwert.

	p	n	Endwert	Barwert
a	4,0 %	4	220.000,00 €	
b	5,0 %	7	180.000,00 €	
c	6,0 %	6	250.000,00 €	
d	7,5 %	4	150.000,00 €	

(VI) Lösungen

(1) Aufzinsungsfaktoren

	p	n	Aufzinsungsfaktor
a	5,0 %	5	1,276282
b	5,5 %	4	1,238825
c	6,0 %	4	1,262477
d	7,0 %	6	1,500730

(2) Abzinsungsfaktoren

	p	n	Abzinsungsfaktor
a	6,0 %	3	0,839619
b	6,5 %	4	0,777323
c	7,0 %	5	0,712986
d	8,0 %	6	0,630170

(3) Endwerte

	p	n	AuF	Barwert	Endwert
a	4,0 %	5	1,216653	110.000,00 €	133.831,83 €
b	5,0 %	6	1,340096	140.000,00 €	187.613,44 €
c	6,0 %	5	1,338226	130.000,00 €	173.969,38 €
d	6,5 %	6	1,459142	175.000,00 €	255.349,85 €

(4) Barwerte

	p	n	AbF	Endwert	Barwert
a	4,0 %	4	0,854804	220.000,00 €	188.056,88 €
b	5,0 %	7	0,710681	180.000,00 €	127.922,58 €
c	6,0 %	6	0,704961	250.000,00 €	176.240,25 €
d	7,0 %	4	0,762895	150.000,00 €	114.434,25 €